II.E Développement asymptotique à trois termes de la suite des log itérés (218) (223) (224) (226) (230)

Théorème 39:

Soit $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} = \ln(u_n + 1) \end{cases}$.
Le développement asymptotique à trois termes de u_n est :

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3}\frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Démonstration. Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et soit u_n défini comme dans l'énoncé.

* Bien définie : $\ln(1 + \mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$ car ln et strictement croissante et $\ln(1) = 0$.
* Convergence : Par continuité de ln si la suite $(u_n)_n$ converge alors elle converge vers un point fixe de $\ln(1 + \cdot)$ i.e. vers 0.
  Or par stricte concavité de ln, on a : $0 < \ln(1 + x) < x$ pour tout réel x strictement positif.
  On a donc que la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0 donc converge.
* Équivalent : soit $\alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= (\ln(1 + u_n))^\alpha - u_n^\alpha \\ &= \left(u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)\right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &= u_n^\alpha \left(\left(1 - \frac{u_n}{2} + o(u_n)\right)^\alpha - 1\right) \\ &= u_n^\alpha \left(1 - \alpha\frac{u_n}{2} + o(u_n) - 1\right) \\ &= -\frac{\alpha}{2}u_n^{\alpha+1} + o\left(u_n^{\alpha+1}\right). \end{aligned}$$

  On prend alors $\alpha = -1$ et on obtient : $u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} \sim \frac{1}{2}$.
  Ainsi la série de terme général $u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1}$ diverge grossièrement et par sommation d'équivalent dans le cas divergent (et par télescopage) :

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1} \sim \frac{n}{2}.$$

  On en déduit donc :

$$u_n \sim \frac{2}{n}.$$

* Deuxième terme : Un développement limité de u_{n+1} est :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + O(u_n^4).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{-1}-u_n^{-1} &= (\ln(1+u_n))^{-1}-u_n^{-1}\\
&= \left(u_n-\frac{u_n^2}{2}+\frac{u_n^3}{3}+O(u_n^4)\right)^{-1}-u_n^{-1}\\
&= u_n^{-1}\left(\left(1-\frac{u_n}{2}+\frac{u_n^2}{3}+O(u_n^3)\right)^{-1}-1\right)\\
&= u_n^{-1}\left(1-\left(-\frac{u_n}{2}+\frac{u_n^2}{3}\right)+\frac{2}{2}\left(-\frac{u_n}{2}+\frac{u_n^2}{3}\right)^2+O(u_n^3)-1\right)\\
&= u_n^{-1}\left(\frac{u_n}{2}-\frac{u_n^2}{12}+O(u_n^3)\right)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{u_n}{12}+O\left(u_n^2\right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'équivalent trouvé précédemment on trouve :

$$u_{n+1}^{-1}-u_n^{-1}-\frac{1}{2}\sim\frac{-u_n}{12}\sim\frac{-2}{12n}=\frac{-1}{6n}.$$

A nouveau par sommation d'équivalent dans le cas divergent et télescopage on déduit :

$$u_n^{-1}-u_0^{-1}-\frac{n}{2}\sim\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{6k}\sim\frac{-\ln(n)}{6}.$$

Finalement

$$u_n=\left(\frac{n}{2}-\frac{\ln(n)}{6}+o\left(\ln(n)\right)\right)^{-1}$$

C'est-à-dire (après factorisation par $\left(\frac{n}{2}\right)^{-1}$ puis DL :

$$u_n=\frac{2}{n}+\frac{2\ln(n)}{3n^2}+o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$

* Troisième terme : On réinjecte l'expression que l'on vient de trouver dans le développement limité que l'on a effectué au début de la partie précédente et on trouve :

$$u_{n+1}^{-1}-u_n^{-1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}\sim-\frac{\ln(n)}{18n^2}.$$

Or la famille $\left(-\frac{\ln(n)}{18n^2}\right)_n$ est sommable par Riemann donc ses sommes partielles convergent vers une constante c_0. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(u_{k+1}^{-1}-u_k^{-1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6k}\right)=u_n^{-1}-u_1^{-1}-\frac{n}{2}+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\longrightarrow c_0.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
u_n^{-1} &= \frac{n}{2}-\frac{1}{6}\ln(n)+\underbrace{u_1^{-1}-\frac{1}{6}\gamma+c_0}_{=:c}+o(1)\\
&= \left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\ln(n)+c+o(1)\right)^{-1}\\
&= \frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{3n}\left(\ln(n)+6c\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}\\
&= \frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{3n}\left(\ln(n)+6c\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{2}{n}+\frac{2}{3}\frac{\ln(n)}{n^2}+\frac{c}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

■